POLINOMUL CARACTERISTIC AL UNEI MATRICE ÎN RAPORT CU ALTĂ MATRICE

Petru ROTARU[1]
rotaru.petru@yahoo.fr

ABSTRACT: The following work considers that the characteristic polynomial of a square matrix of order n is defined in relation to the square matrix In, this observation allows us to expand the notion of the characteristic polynomial of a matrix A in relation to another square matrix of the same order with A, the polynomial coefficients being sums of mixed determinants. This polynomial allows for a generalization of the Cayley-Hamilton relation for two matrixes A and B that commute and afterwards form the necessary and adequate conditions for the forming of two homogenous and invertible matrixes of grade p of the two matrixes A and B. Interesting to note is also an intermediary result, the lemma of the two polynomial matrixes, that can lead to the generating of new mathematical identities.
KEYWORDS: polynomial, array, determinant, theorem.

Fie $(K,+,\cdot)(K,+,\cdot)$ un corp comutativ, $A,B \in \mathcal{M}_n(K)A,B \in \mathcal{M}_n(K)$ matrice pătratice de ordinul $n \geq 2\,(n,natural)n \geq 2\,(n,natural)$ cu elemente din corpul $K,K,$ atunci $(\mathcal{M}_n(K),+,\cdot)(\mathcal{M}_n(K),+,\cdot)$ este inelul matricelor cu elemente din corpul KK, unde adunarea și înmulțirea matricelor sunt preluate din adunarea și înmulțirea de pe corpul $K.K.$

Definim polinomul $f_{A,B} = \det(A - XB)f_{A,B} = \det(A - XB)$ ca fiind polinomul caracteristic al matricei AA în raport cu matricea BB, în expresia polinomului caracteristic $f_{A,B}\ f_{A,B}$ vom folosi calculul cu determinanți micști, astfel:

$$(*)f_{A,B} = \det(A - XB) = detA - d^{A}_{n-1}{}^{B}_{1} \cdot X + d^{A}_{n-2}{}^{B}_{2} \cdot X^2 + \cdots + (-1)^k \cdot d^{A}_{n-k}{}^{B}_{k} \cdot X^k + \cdots$$
$$+(-1)^n(detB) \cdot X^n, +(-1)^n(detB) \cdot X^n,$$

unde $d^{A}_{n-k}{}^{B}_{k} d^{A}_{n-k}{}^{B}_{k}$ reprezintă suma tuturor determinanților micști cu $n-kn-k$ linii din matricea AA și kk linii din matricea BB (sunt $C^n_k C^n_k$ astfel de determinanți).

1 Profesor, Colegiul Tehnic „Dimitrie Ghika”, Comănești; vicepreședinte al Societății de Științe Matematice din România – Filiala Comănești; membru asociat al Diviziei de Istoria Științei a CRIFST al Academiei Române;

Observăm că și coeficientul lui X^nX^n, respectiv termenul liber, pot fi văzuți tot ca niște determinanți micști.

Pentru $K = \mathbb{R}K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}K = \mathbb{C}$ și matricea BB – inversabilă, polinomul caracteristic al matricei $A\,A$ în raport cu BB are gradul egal cu nn și rădăcinile acestui polinom sunt: $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n \in \mathbb{C}\, x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n \in \mathbb{C}$ satisfac relațiile lui Viète.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \frac{d_1^A \; {}^B_{n-1}}{detB} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{d_2^A \; {}^B_{n-2}}{detB} \\ x_1x_1x_1\cdots x_1 = \frac{detA}{detB} \end{cases} \quad \text{(V1)}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \frac{d_1^A \; {}^B_{n-1}}{detB} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{d_2^A \; {}^B_{n-2}}{detB} \\ x_1x_1x_1\cdots x_1 = \frac{detA}{detB} \end{cases}$$

, iar dacă $detB = 0,$ $detB = 0,$ atunci acest polinom are gradul mai mic decât nn și relațiile (V1) se adaptează corespunzător, în această situație, presupunând gradul $(f_{A,B}) = p(f_{A,B}) = p$, vom considera $p \geq 1p \geq 1$

În continuare, vom presupune $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $AB = BA\,AB = BA$ și $f_{A,B} = \det(A - XB) == detA - d_{n-1}^A \; {}^B_1 \cdot X + \cdots + (-1)^n(detB)X^n,$ $f_{A,B} = \det(A - XB) == detA - d_{n-1}^A \; {}^B_1 \cdot X + \cdots + (-1)^n(detB)X^n,$ unde BB este matrice inversabilă, dar:

$$\det(A - XB) = \det\big((AB^{-1} - XI_n)B\big) = (detB) \cdot \det(AB^{-1} - XI_n),$$

$$\det(A - XB) = \det\big((AB^{-1} - XI_n)B\big) = (detB) \cdot \det(AB^{-1} - XI_n),$$ de unde rezultă că:

$f_{A,B} = (detB) \cdot f_{AB^{-1},I_n}$, $f_{A,B} = (detB) \cdot f_{AB^{-1},I_n}$, aici $f_{AB^{-1},I_n} f_{AB^{-1},I_n}$ reprezintă polinomul caracteristic al matricei $AB^{-1},AB^{-1},$ adică:

Polinomul caracteristic al matricei AA în raport cu matricea BB – inversabilă, se exprimă cu ajutorul polinomului caracteristic al matricei $AB^{-1}AB^{-1}$ în raport cu I_nI_n ceea ce înseamnă că teorema Cayley-Hamilton (orice matrice este soluție a propriului polinom caracteristic) are loc și în cazul polinomului caracteristic al matricei AA în raport cu $B.B.$ Folosind (1) și relația de definiție a polinomului caracteristic al matricei AA în raport cu BB obținem:

$(detA)I_n - d^A_{n-1\,1}{}^B(AB^{-1}) + d^A_{n-2\,2}{}^B(AB^{-1})^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot d^A_{1\,n-1}{}^B(AB^{-1})^{n-1} +$
$+(-1)^n(detB)(AB^{-1})^n = O_n$
$(detA)I_n - d^A_{n-1\,1}{}^B(AB^{-1}) + d^A_{n-2\,2}{}^B(AB^{-1})^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot d^A_{1\,n-1}{}^B(AB^{-1})^{n-1} +$
$+(-1)^n(detB)(AB^{-1})^n = O_n$

Această relație, după ce o înmulțim cu B^nB^n devine:

(C - H)

$(detA)B^n - (d^A_{n-1\,1}{}^B)AB^{n-1} + (d^A_{n-1\,1}{}^B)A^2B^{n-2} + \cdots + (-1)^n(detB)A^n = O_n$
$(detA)B^n - (d^A_{n-1\,1}{}^B)AB^{n-1} + (d^A_{n-1\,1}{}^B)A^2B^{n-2} + \cdots + (-1)^n(detB)A^n = O_n$

aici am folosit: $AB = BAAB = BA$ și considerăm că sunt motive să numim relația anterioară: relația Cayley-Hamilton pentru matricele AA și BB care comută.

Pentru $n = 2n = 2$, în relația (C-H), obținem:

$(detA)B^2 - (d^{A\,B}_{1\,1})AB + (detB)A^2 = O_2$
$(detA)B^2 - (d^{A\,B}_{1\,1})AB + (detB)A^2 = O_2$ oricare ar fi matricele $A,B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})A,B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $AB = BA\,AB = BA$. În relația (2) folosim (C-H) pentru AA și pentru BB, atunci obținem:

$(d^{A\,B}_{1\,1})AB = (trA)(detB)A + (trB)(detA)B - 2(detA)(detB) \cdot I_2$
$(d^{A\,B}_{1\,1})AB = (trA)(detB)A + (trB)(detA)B - 2(detA)(detB) \cdot I_2$ unde $A,B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})A,B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $AB = BAAB = BA$. Pentru $n = 3$ $n = 3$, în relația (C-H), obținem:

$(detA)B^3 - d^{A\,B}_{2\,1} \cdot AB^2 + d^{A\,B}_{1\,2} \cdot A^2B - (detB)A^3 = O_3, \forall$
$(detA)B^3 - d^{A\,B}_{2\,1} \cdot AB^2 + d^{A\,B}_{1\,2} \cdot A^2B - (detB)A^3 = O_3, \forall\ A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
$A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $AB = BAAB = BA$

În relația (4), folosim C-H pentru matricea AA și pentru BB, atunci obținem:

$d^{A\,B}_{1\,2}A^2B - (detB)(trA)A^2 - s(A)(detB)A = (d^{A\,B}_{2\,1})AB^2 - (detA)(trB)B^2 - -(\det A)\big(s(B)\big)B$
$d^{A\,B}_{1\,2}A^2B - (detB)(trA)A^2 - s(A)(detB)A = (d^{A\,B}_{2\,1})AB^2 - (detA)(trB)B^2 - -(\det A)\big(s(B)\big)B$

$\forall\ \ \forall A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $AB = BAAB = BA$, unde $s(X)s(X)$ reprezintă suma minorilor diagonali de ordinul doi ai matricei XX.

Pentru $n = 4n = 4$, în relația (C-H), obținem:

$(detA)B^4 - d^{A\,B}_{3\,1} \cdot AB^3 + d^{A\,B}_{2\,2} \cdot A^2B^2 - d^{A\,B}_{1\,3} \cdot A^3B + (detB)A^4 = O_4,$
$(detA)B^4 - d^{A\,B}_{3\,1} \cdot AB^3 + d^{A\,B}_{2\,2} \cdot A^2B^2 - d^{A\,B}_{1\,3} \cdot A^3B + (detB)A^4 = O_4,$

oricare ar fi $A,B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})\,A,B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ cu $AB = BAAB = BA$

Observație: Pentru relațiile (2);(3);(4);(5) și (6), avem motive să le numim relații Cayley-Hamilton pentru matricele AA și BB care comută.

Inspirați de aceste ultime formule, definim:

(O)

$$A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + a_2A^{p-2}\cdot B^2 + \cdots + a_kA^{p-k}\cdot B^k + \cdots + a_{p-1}A^1\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p$$

$$A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + a_2A^{p-2}\cdot B^2 + \cdots + a_kA^{p-k}\cdot B^k + \cdots + a_{p-1}A^1\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p$$

ca fiind o formă omogenă de gradul pp a matricelor AA și BB cu proprietatea $AB = BAAB = BA$

În legătură cu (O) definim polinomul atașat formei omogene (O) ca fiind polinomul:

$$(\ *\ *\ )\quad g_O(Z) = Z^p + a_1Z^{p-1} + a_2Z^{p-2} + \cdots + a_{p-1}Z + a_p$$

$g_O(Z) = Z^p + a_1Z^{p-1} + a_2Z^{p-2} + \cdots + a_{p-1}Z + a_p$, aici am considerat $a_1, a_2, \cdots a_p \in \mathbb{C}a_1, a_2, \cdots a_p \in \mathbb{C}$ și $z_1, z_2, \cdots, z_pz_1, z_2, \cdots, z_p$ sunt rădăcinile lui g_0g_0 care satisfac relațiile:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \cdots + z_p = -a_1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_{p-1}z_p = a_2 \\ \cdots \\ z_1z_2z_3\cdots z_p = (-1)^p a_p \end{cases}$$

(V2)

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \cdots + z_p = -a_1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_{p-1}z_p = a_2 \\ \cdots \\ z_1z_2z_3\cdots z_p = (-1)^p a_p \end{cases}$$

În această situație, forma omogenă (O) se poate rescrie:

(O')

$$A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p = (A - Z_1B)(A - Z_2B)\cdots(A - Z_pB)$$

$$A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p = (A - Z_1B)(A - Z_2B)\cdots(A - Z_pB)$$

și atunci:

$$det\left(A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p\right) = \det\Big((A - Z_1B)\cdot(A - Z_2B)\cdots\big(A - Z_pB\big)\Big) = \prod_{k=1}^{p}\det\,(A - Z_kB)$$

$$det\left(A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p\right) = \det\Big((A - Z_1B)\cdot(A - Z_2B)\cdots\big(A - Z_pB\big)\Big) = \prod_{k=1}^{p}\det\,(A - Z_kB)$$

, am obținut:

$$det\left(A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p\right) = \prod_{k=1}^{p} f_{A,B}(Z_k),$$

$$det\left(A^p + a_1A^{p-1}\cdot B + \cdots + a_{p-1}A\cdot B^{p-1} + a_p\cdot B^p\right) = \prod_{k=1}^{p} f_{A,B}(Z_k),$$

unde $f_{A,B}f_{A,B}$ este polinomul caracteristic al matricei AA în raport cu B B, iar $Z_k(k = \overline{1,n})Z_k(k = \overline{1,n})$ sunt rădăcinile polinomului atașat formei (O), definit în (**).

În continuare, vom da și o altă formă pentru determinantul din formula (7), dar pentru aceasta avem nevoie de un rezultat intermediar, pe care îl prezentăm acum:

Lema celor două polinoame

Dacă polinoamele ff și gg cu coeficienți complecși sunt:

$f = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$

$f = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$

și $g = b_nZ^n + b_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + b_1Z + b_0$

$g = b_nZ^n + b_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + b_1Z + b_0$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \cdots, x_p$

$x_1, x_2, \cdots, x_p$, respectiv $z_1, z_2, \cdots, z_nz_1, z_2, \cdots, z_n$, atunci:

$(b_n)^p \cdot \prod_{k=1}^{n} f(z_k) = (-1)^{n\cdot p} \cdot (a_p)^n \cdot \prod_{h=1}^{p} g(x_h)$

$(b_n)^p \cdot \prod_{k=1}^{n} f(z_k) = (-1)^{n\cdot p} \cdot (a_p)^n \cdot \prod_{h=1}^{p} g(x_h)$, unde $p, n \in \mathbb{N}^*$

$p, n \in \mathbb{N}^*$

Demonstrație. Folosindu-ne de rădăcinile lor exprimăm:

$f(X) = a_p(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_p)$

$g(Z) = b_n(Z - z_1)(Z - z_2)\cdots(Z - z_n)$

$g(Z) = b_n(Z - z_1)(Z - z_2)\cdots(Z - z_n)$, acum:

$f(z_1) = a_p(z_1 - x_1)(z_1 - x_2)\cdots(z_1 - x_p)$

$f(z_2) = a_p(z_2 - x_1)(z_2 - x_2)\cdots(z_2 - x_p)$

$\vdots$

$f(z_n) = a_p(z_n - x_1)(z_n - x_2)\cdots(z_n - x_p)$

$f(z_n) = a_p(z_n - x_1)(z_n - x_2)\cdots(z_n - x_p)$, aceste $n\,n$ egalități le înmulțim, membru cu membru:

$\prod_{k=1}^{n} f(z_k) = (a_p)^n \cdot [(z_1 - x_1)(z_2 - x_1)\cdots(z_n - x_1)] \cdot [(z_1 - x_2)(z_2 - x_2)\cdots(z_n - x_2)]\cdots$
$[(z_1 - x_p)(z_2 - x_p)\cdots(z_n - x_p)] == (a_p)^n \cdot (-1)^n \cdot [(x_1 - z_1)(x_1 - z_2)\cdots(x_1 - z_n)] \cdot (-1)^n \cdot\cdot$
$[(x_1 - z_1)(x_1 - z_2)\cdots(x_1 - z_n)] \cdot (-1)^n \cdot [(x_2 - z_1)(x_2 - z_2)\cdots(x_2 - z_n)] \cdot \cdots \cdot (-1)^n \cdot$
$[(x_p - z_1)(x_p - z_2)\cdots(x_p - z_p)] = (a_p)^n \cdot (-1)^{np} \cdot \frac{g(x_1)}{b_n} \cdot \frac{g(x_2)}{b_n} \cdot \ldots \cdot \frac{g(x_p)}{b_n}$

$\prod_{k=1}^{n} f(z_k) = (a_p)^n \cdot [(z_1 - x_1)(z_2 - x_1)\cdots(z_n - x_1)] \cdot [(z_1 - x_2)(z_2 - x_2)\cdots(z_n - x_2)]\cdots$
$[(z_1 - x_p)(z_2 - x_p)\cdots(z_n - x_p)] == (a_p)^n \cdot (-1)^n \cdot [(x_1 - z_1)(x_1 - z_2)\cdots(x_1 - z_n)] \cdot (-1)^n \cdot\cdot$
$[(x_1 - z_1)(x_1 - z_2)\cdots(x_1 - z_n)] \cdot (-1)^n \cdot [(x_2 - z_1)(x_2 - z_2)\cdots(x_2 - z_n)] \cdot \cdots \cdot (-1)^n \cdot$
$[(x_p - z_1)(x_p - z_2)\cdots(x_p - z_p)] = (a_p)^n \cdot (-1)^{np} \cdot \frac{g(x_1)}{b_n} \cdot \frac{g(x_2)}{b_n} \cdot \ldots \cdot \frac{g(x_p)}{b_n}$

și de aici rezultă egalitatea din lemă, am presupus cele două polinoame de grade $p,p,$ respectiv nn.

Acum putem da și o altă formulă pentru determinantul formei omogene (O) unde vom folosi lema celor două polinoame, aplicată polinoamelor $f_{A,B}f_{A,B}$ și $g_O\,g_O$ astfel

$\det(A^p + a_1 \cdot A^{p-1} \cdot B + a_2 \cdot A^{p-2} \cdot B^2 + \cdots + a_p \cdot B^p) = \prod_{k=1}^{p} f_{A,B}(Z_k) = (-1)^{np}((-1)^n \cdot detB)^p \cdot \prod_{h=1}^{n} g(x_h)$

$\det(A^p + a_1 \cdot A^{p-1} \cdot B + a_2 \cdot A^{p-2} \cdot B^2 + \cdots + a_p \cdot B^p) = \prod_{k=1}^{p} f_{A,B}(Z_k) = (-1)^{np}((-1)^n \cdot detB)^p \cdot \prod_{h=1}^{n} g(x_h)$

adică:

$$\det\left(A^p + a_1 \cdot A^{p-1} \cdot B + a_2 \cdot A^{p-2} \cdot B^2 + \cdots + a_p \cdot B^p\right) = (detB)^p \cdot \prod_{h=1}^{n} g(x_h)$$

Formulele (7) și (8) demonstrează următoarele afirmații:

Matricea (O) este singulară dacă și numai dacă polinoamele $f_{A,B}\,f_{A,B}$ (polinomul caracteristic al matricei AA în raport cu BB) și g_Og_O (polinomul atașat formei omogene (O) a matricelor AA și BB), au cel puțin o rădăcină comună.

Matricea (O) este nesingulară dacă și numai dacă polinoamele $f_{A,B}f_{A,B}$ și g_Og_O sunt prime între ele.

Facem observația că în formula (8) am presupus matricea BB inversabilă, iar dacă $detB = 0detB = 0$, atunci $f_{A,B}f_{A,B}$ are gradul mai mic decât nn și $detBdetB$ se înlocuiește cu coeficientul termenilor din $f_{A,B}f_{A,B}$ care ne dă gradul polinomului (coeficientul dominant al polinomului).

În continuare observăm câteva proprietăți pentru valorile proprii ale matricei AA în raport cu BB, adică pentru rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ale polinomului caracteristic al matricei AA în raport cu matricea BB.

Dacă matricea AA în raport cu BB are valorile proprii $\{x_i\}, i = \overline{1,n}$ $\{x_i\}, i = \overline{1,n}$ atunci matricea $A - cB, A - cB,$ unde $c \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C},$ are ca valori proprii pe $x_i - c, i = \overline{1,n} x_i - c, i = \overline{1,n}$ în raport cu BB

Demonstrație: Luăm xx valoare proprie a matricei AA în raport cu B B, rezultă că

$\det(A - xB) = 0 \qquad \det(A - xB) = 0$

$0 = \det(A - xB) = \det(A - (x - c)B - cB) = \det\left((A - cB) - (x - c)B\right)$

$0 = \det(A - xB) = \det(A - (x - c)B - cB) = \det\left((A - cB) - (x - c)B\right)$

adică $A - cBA - cB$ are ca valoare proprie pe $x - cx - c$ în raport cu BB.

Dacă xx este valoare proprie a matricei AA în raport cu BB, atunci x^p x^p este valoare proprie a matricei A^pA^p în raport cu $B^p, p \in \mathbb{N}^* B^p, p \in \mathbb{N}^*$

Demonstrație: Avem $\det(A - xB) = 0, \det(A - xB) = 0,$ atunci:

$\det(A^p - x^p B^p) = \det(A^p - (xB)^p) = \det(A - xB) \cdot \det(A^{p-1} + xA^{p-2}B + \cdots + x^{p-1} \cdot B^{p-1}) = 0,$

$\det(A^p - x^p B^p) = \det(A^p - (xB)^p) = \det(A - xB) \cdot \det(A^{p-1} + xA^{p-2}B + \cdots + x^{p-1} \cdot B^{p-1}) = 0,$

de unde rezultă afirmația.

Dacă xx este valoare proprie a matricei AA în raport cu BB, atunci x^{-p} x^{-p} este valoare proprie a matricei B^pB^p în raport cu $A^p, p \in \mathbb{N}^* A^p, p \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație: Avem $\det(A - xB) = 0 \det(A - xB) = 0$ și atunci

$\det(B^p - x^{-p}A^p) = \det\left(-x^{-p}(A^p - x^p B^p)\right) = (-x^{-p})^n \cdot \det(A^p - x^p B^p) = 0,$

$\det(B^p - x^{-p}A^p) = \det\left(-x^{-p}(A^p - x^p B^p)\right) = (-x^{-p})^n \cdot \det(A^p - x^p B^p) = 0,$

aici am folosit și (ii)

APLICAȚII

a.1. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ – inversabilă are valorile proprii, în raport cu ea însăși, egale cu 1

Soluție

$\det(A - xA) = \det\left((1 - x)A\right) = (1 - x)^n \cdot detA$

$\det(A - xA) = \det\left((1 - x)A\right) = (1 - x)^n \cdot detA$ și de aici $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1 x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$

a.2. Polinomul identic nul este polinom caracteristic al oricărei matrice singulare AA în raport cu ea însăși.

Soluție

Fie $A A$ singulară, atunci

$\det(A - xA) = \det\left((1 - x)A\right) = (1 - x)^n \cdot detA = 0,$

$\det(A - xA) = \det\left((1 - x)A\right) = (1 - x)^n \cdot detA = 0,$ adică $f_{A,A} = 0$ $f_{A,A} = 0$

a.3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ cu $AB = BAAB = BA$ și $f_{A,B}(X) = (a - x)^p, a \in \mathbb{R} f_{A,B}(X) = (a - x)^p, a \in \mathbb{R}$

Demonstrați că $\det(A^n + B^n) = (1 + a^n)^p, n, p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ $\det(A^n + B^n) = (1 + a^n)^p, n, p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

Soluție

A v e m : $f_{A,B} = a^p - C_p^1 a^{p-1}x + \cdots + (-1)^p \cdot x^p,$ $f_{A,B} = a^p - C_p^1 a^{p-1}x + \cdots + (-1)^p \cdot x^p,$ forma omogenă $(O)(O)$: $A^n + B^n$ $A^n + B^n$ are polinomul caracteristic atașat $g_O = Z^n + 1 g_O = Z^n + 1$ și atunci $\det(A^n + B^n)$ $= \det(A^n + B^n) =$ $(8) = (detB)^p \cdot \prod_{h=1}^{p} g_O(x_h),$ $= (detB)^p \cdot \prod_{h=1}^{p} g_O(x_h),$ dar $x_h = a\ ,\ h = \overline{1,p} x_h = a\ ,\ h = \overline{1,p}$ iar $detB = 1 detB = 1$, acestea rezultă ușor din definiția lui $f_{A,B} f_{A,B}$ și forma $f_{A,B} = (a-x)^p f_{A,B} = (a-x)^p$ Deci $\det(A^n + B^n) = (1+a^n)^p$ $\det(A^n + B^n) = (1+a^n)^p$

a.4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ cu $AB = BA AB = BA$ și $f_{A,B}(X) = (a-x)^{p-1}(b-x) f_{A,B}(X) = (a-x)^{p-1}(b-x)$ unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b. a, b \in \mathbb{R}, a \neq b.$

Demonstrați că $\det(A^n + B^n) = (1+b^n)(1+a^n)^{p-1}, n, p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}.$ $\det(A^n + B^n) = (1+b^n)(1+a^n)^{p-1}, n, p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}.$

Soluție

A v e m $f_{A,B} = a^{p-1} \cdot b + \cdots + (-1)^p \cdot x^p,$ $f_{A,B} = a^{p-1} \cdot b + \cdots + (-1)^p \cdot x^p,$ de aici și din definiția lui $f_{A,B} f_{A,B}$, rezultă că $detB = 1, detB = 1,$ iar forma omogenă (O): $A^n + B^n A^n + B^n$ are polinomul atașat $g_O = Z^n + 1 g_O = Z^n + 1$ și atunci

$\det(A^n + B^n) =$ $\det(A^n + B^n) =$ (8) $= (detB)^n \cdot \prod_{h=1}^{p} g(x_h) = \underbrace{(1+a^n)(1+a^n)\cdots(1+a^n)}(1+b^n) = (1+a^n)^{p-1} \cdot (1+b^n)$ $= (detB)^n \cdot \prod_{h=1}^{p} g(x_h) = \underbrace{(1+a^n)(1+a^n)\cdots(1+a^n)}(1+b^n) = (1+a^n)^{p-1} \cdot (1+b^n)$

a.5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ cu $AB = BA AB = BA$ și $f_{A,B}(X) = \det(A - xB) f_{A,B}(X) = \det(A - xB)$ Dacă $f_{A,B}(X) = 0,$ $f_{A,B}(X) = 0,$

are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p \in \mathbb{C}, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p \in \mathbb{C},$ atunci:
$\det(A^n + B^n) = (detB)^n \cdot (1+x_1^n) \cdot (1+x_2^n) \cdot \cdots \cdot (1+x_p^n)$

Soluție

Forma omogenă (O): $A^n + B^n A^n + B^n$ are polinomul atașat $g_O(Z) = Z^n + 1 g_O(Z) = Z^n + 1$ și atunci

$$\det(A^n + B^n) = (detB)^n \cdot \prod_{h=1}^{p} (1 + x_h^n)$$

a.6. . Fie $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BA,\ detB=0,\det(A+B)=3,\det(A-B)=\det(A^2+B^2)=1.$
$AB=BA,\ detB=0,\det(A+B)=3,\det(A-B)=\det(A^2+B^2)=1.$
Să se calculeze $\det(A^{2014}+B^{2014})\det(A^{2014}+B^{2014})$

Aceasta este problema 26882 din G.M.2–2014. Din datele problemei, vom afla polinomul caracteristic al matricei BB în raport cu AA, apoi vom considera forma omogenă (O): $A^n+B^nA^n+B^n$ cu $g_O=Z^n+1$ $g_O=Z^n+1$, pentru ca să calculăm $\det(A^n+B^n)\det(A^n+B^n)$.

$f_{B,A}=\det(B-xA)=detB-xd_{2\,1}^{BA}+x^2d_{1\,2}^{BA}-x^3detA=$
$=-(detA)x^3+d_{1\,2}^{BA}\cdot x^2-d_{2\,1}^{BA}\cdot x$

Din $\det(B+A)=1,\ \det(B+A)=1,$ rezultă $detB+d_{2\,1}^{BA}+d_{1\,2}^{BA}+detA=1detB+d_{2\,1}^{BA}+d_{1\,2}^{BA}+detA=1$

Din $\det(A-B)=1\det(A-B)=1,$ rezultă $-\det(B-A)=1$ $-\det(B-A)=1$ și apoi $-detB+d_{2\,1}^{BA}-d_{1\,2}^{BA}+detA=1,$ $-detB+d_{2\,1}^{BA}-d_{1\,2}^{BA}+detA=1,$ iar din acestea două: $d_{1\,2}^{BA}=1d_{1\,2}^{BA}=1$ și $detA+d_{2\,1}^{BA}=2detA+d_{2\,1}^{BA}=2$

Acum din $\det(A^2+B^2)=1\det(A^2+B^2)=1$ avem $\det(B+Ai)\det(B-Ai)=1,\det(B+Ai)\det(B-Ai)=1,$ care se duce la $d_{1\,2}^{BA}+\left(d_{2\,1}^{BA}-detA\right)=1\ d_{1\,2}^{BA}+\left(d_{2\,1}^{BA}-detA\right)=1$ și obținem: $detA=1;\ d_{2\,1}^{BA}=1;\ d_{1\,2}^{BA}=1detA=1;\ d_{2\,1}^{BA}=1;\ d_{1\,2}^{BA}=1$ adică

$f_{B,A}=-X^3+X^2-Xf_{B,A}=-X^3+X^2-X$ cu rădăcinile $x_1=0x_1=0$ și $x_{2,3}\,x_{2,3}$ rădăcinile ecuației $x^2-x+1=0x^2-x+1=0$

Atunci (O): $A^n+B^nA^n+B^n$, are $g_O(Z)=z^n+1g_O(Z)=z^n+1$ și avem:

$\det(A^n+B^n)=(detA)^n\prod_{h=1}^{3}g_O(x_h)=(1)^n\cdot g_O(x_1)\cdot g_O(x_2)\cdot g_O(x_3)=(1+x_2^n)(1+x_3^n)=$
$1+x_2^n+x_3^n+(x_2x_3)^n=2+x_2^n+x_3^n=$
$\det(A^n+B^n)=(detA)^n\prod_{h=1}^{3}g_O(x_h)=(1)^n\cdot g_O(x_1)\cdot g_O(x_2)\cdot g_O(x_3)=(1+x_2^n)(1+x_3^n)=$
$1+x_2^n+x_3^n+(x_2x_3)^n=2+x_2^n+x_3^n=$

$=\begin{cases}4,n=6k\\3,n=6k+1\\1,n=6k+2\\0,n=6k+3\\1,n=6k+4\\3,n=6k+5\end{cases}'=\begin{cases}4,n=6k\\3,n=6k+1\\1,n=6k+2\\0,n=6k+3\\1,n=6k+4\\3,n=6k+5\end{cases}'$ am folosit: $\begin{cases}x_2+x_3=1\\x_1x_2=1\\x_2^3=x_2^3=-1\end{cases}\begin{cases}x_2+x_3=1\\x_1x_2=1\\x_2^3=x_2^3=-1\end{cases}$

În particular, $\det(A^{2014}+B^{2014})=1\det(A^{2014}+B^{2014})=1$

Observație. Pentru această problemă, în condițiile ipotezei din problemă se poate cere: să se demonstreze că $AB^2=(A^2+B^2)B$ $AB^2=(A^2+B^2)B$. Iată soluția pentru această afirmație:

A v e m $f_{B,A}=\det(B-XA)=detB-d_{2\,1}^{BA}\cdot X+X^2\cdot d_{1\,2}^{BA}-(detA)X^3=-X^3+X^2-X$
$f_{B,A}=\det(B-XA)=detB-d_{2\,1}^{BA}\cdot X+X^2\cdot d_{1\,2}^{BA}-(detA)X^3=-X^3+X^2-X$

și folosindu-ne de relația (C-H) pentru BB și AA, adică de (4), obținem:

$(detB)A^3-d_{2\,1}^{BA}\cdot BA^2+d_{1\,2}^{BA}\cdot B^2A-(detA)B^3=O_3$
$(detB)A^3-d_{2\,1}^{BA}\cdot BA^2+d_{1\,2}^{BA}\cdot B^2A-(detA)B^3=O_3$, adică
$B^3+BA^2=B^2AB^3+BA^2=B^2A$, adică
$AB^2=(A^2+B^2)B$

Problemă propusă

Fie $A,B\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ $A,B\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $AB=BA,\ detA=0;detB=1\ \det(A+B)=4$
$AB=BA,\ detA=0;detB=1\ \det(A+B)=4$ și $\det(A^2+B^2)=0.$
$\det(A^2+B^2)=0.$

Demonstrați că:
$A^2(A^2+B^2)=AB(A^2+B^2)$

$$\det(A^n+B^n)=\begin{cases}8, & pentru\ n\ divizibil\ cu\ 4\\ 4, & pentru\ n\ impar\\ 0, & pentru\ n\ par\ nedivizibil\ cu\ 4\end{cases}$$

Soluție

Aflăm coeficienții polinomului caracteristic al matricei AA în raport cu BB:
($detA;\ d_{3\,1}^{AB};\ d_{2\,2}^{AB};\ d_{1\,3}^{AB}\,detA;\ d_{3\,1}^{AB};\ d_{2\,2}^{AB};\ d_{1\,3}^{AB}$ și $detBdetB$)
$\det(A+B)=detA+d_{3\,1}+d_{2\,2}+d_{1\,3}+detB=d_{3\,1}+d_{2\,2}+d_{1\,3}+1=4$
$\det(A+B)=detA+d_{3\,1}+d_{2\,2}+d_{1\,3}+detB=d_{3\,1}+d_{2\,2}+d_{1\,3}+1=4$
, apoi
$\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\det(A-iB)=(detA-id_{3\,1}-id_{2\,2}-id_{1\,3}+1)(detA-id_{3\,1}-id_{2\,2}-id_{1\,3}+1)=(1-d_{2\,2})^2+(d_{3\,1}-d_{1\,3})^2=0\ =>$
$\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\det(A-iB)=(detA-id_{3\,1}-id_{2\,2}-id_{1\,3}+1)(detA-id_{3\,1}-id_{2\,2}-id_{1\,3}+1)=(1-d_{2\,2})^2+(d_{3\,1}-d_{1\,3})^2=0\ =>$
$d_{2\,2}=1d_{2\,2}=1;\quad d_{1\,3}=d_{3\,1}d_{1\,3}=d_{3\,1}$ și revenind în relația

anterioară, obținem: $detA = 0;\ d_{31} = 1;\ d_{22} = 1;\ d_{13} = 1; detB = 1$
$detA = 0;\ d_{31} = 1;\ d_{22} = 1;\ d_{13} = 1; detB = 1$

$f_{B,A}(X) = \det(A - xB) = detA - xd_{31} + x^2 d_{22} - x^3 d_{13} + x^4 detB$
$f_{B,A}(X) = \det(A - xB) = detA - xd_{31} + x^2 d_{22} - x^3 d_{13} + x^4 detB$, deci:

$f_{B,A}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X = (X^2 - X)(X^2 + 1)$
$f_{B,A}(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X = (X^2 - X)(X^2 + 1)$ cu rădăcinile $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_{3,4} = \pm i x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_{3,4} = \pm i$

Aplicăm (C-H) pentru matricile AA și BB, rezultă $AB^{-1}AB^{-1}$ este soluție a polinomului caracteristic al matricei AA în raport cu BB, rezultă $(AB^{-1})^4 - (AB^{-1})^3 + (AB^{-1})^2 - (AB^{-1}) = O_4$
$(AB^{-1})^4 - (AB^{-1})^3 + (AB^{-1})^2 - (AB^{-1}) = O_4$ aici înmulțim cu B^4B^4 și obținem: $A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 = O_4 A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 = O_4$ adică:

$A^2(A^2 + B^2) = AB(A^2 + B^2), A^2(A^2 + B^2) = AB(A^2 + B^2),$ rezultă 1)

Pentru forma omogenă $A^n + B^n\ A^n + B^n$ considerăm polinomul atașat $g_O(Z) = Z^n + 1 g_O(Z) = Z^n + 1$ cu rădăcinile $Z_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n} Z_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}$ și atunci
$\det(A^n + B^n) = \prod_{k=1}^{n} f(Z_k) = \prod_{h=1}^{4} g_O(x_h) = g_O(0) \cdot g_O(1) \cdot g_O(i) \cdot g_O(-i) = (0+1)(1+1)(i^n+1)((-i)^n+1) = 2(1+i^n+(-i)^n+1) = 2(2+i^n+(-i)^n) =$
$\begin{cases} 8, pentru\ n\ divizibil\ cu\ 4 \\ 4, pentru\ n\ impar \\ 0, pentru\ n\ par, nedivizibil\ cu\ 4 \end{cases}$
$\det(A^n + B^n) = \prod_{k=1}^{n} f(Z_k) = \prod_{h=1}^{4} g_O(x_h) = g_O(0) \cdot g_O(1) \cdot g_O(i) \cdot g_O(-i) = (0+1)(1+1)(i^n+1)((-i)^n+1) = 2(1+i^n+(-i)^n+1) = 2(2+i^n+(-i)^n) =$
$\begin{cases} 8, pentru\ n\ divizibil\ cu\ 4 \\ 4, pentru\ n\ impar \\ 0, pentru\ n\ par, nedivizibil\ cu\ 4 \end{cases}$

Bibliografie:

Gazeta Matematică Nr. 6–7–8/2012